

УДК 512.815.1+512.815.6+512.816.1

MSC 22E46+17B10+17B20+17B45

О. Г. Стырт

О простейших стационарных подалгебрах для компактных линейных алгебр Ли

Получены некоторые достаточные условия существования вектора с одномерной либо простой трёхмерной стационарной подалгеброй для неприводимой компактной линейной алгебры Ли.

Ключевые слова: компактная линейная алгебра Ли, система корней, схема Дынкина, стационарная подалгебра общего положения (с.п.о.п.).

Some sufficient conditions of existence of a vector with one-dimensional or simple three-dimensional stationary subalgebra for an irreducible compact linear Lie algebra are obtained.

Key words: compact linear Lie algebra, root system, Dynkin scheme, stationary subalgebra in general position (s.s.g.p.).

§ 1. Введение

Пусть $V_{\mathbb{R}}$ — вещественное векторное пространство, а $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{sl}(V_{\mathbb{R}})$ — неприводимая компактная линейная алгебра Ли ранга $r > 1$, имеющая простой коммутант.

Нас будет интересовать вопрос о том, существует ли вектор $v \in V_{\mathbb{R}}$, стационарная подалгебра которого изоморфна одной из алгебр \mathbb{R} и \mathfrak{su}_2 , т. е. выполняется ли условие

$$\exists v \in V_{\mathbb{R}}: \quad \mathrm{rk}((\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})_v) = 1. \quad (1.1)$$

Данная задача является вспомогательной для проблемы нахождения всех компактных линейных групп, топологический фактор действия которых гомеоморфен клетке. К настоящему моменту разобраны случаи группы с коммутативной связной компонентой [1] и простой трёхмерной группы [2, 3]. Произвольное же линейное представление, обладающее вектором со стабилизатором ранга 1, планируется свести к соответствующему слайс-представлению при помощи теоремы о слайсе [4, гл. II, §§ 4–5].

Мы будем пользоваться следующими обозначениями, связанными с представлениями комплексных редуктивных алгебр Ли. Представление произвольной комплексной

редуктивной алгебры Ли, сопряжённое представлению R , обозначим через R' . При обозначении прямой суммы представлений будем для удобства пользоваться знаком «+» вместо знака « \oplus ».

Обозначим через V комплексное пространство $V_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$, а через \mathfrak{g} — комплексную редуктивную линейную алгебру Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \subset (\mathfrak{sl}(V_{\mathbb{R}}))(\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(V)$, имеющую согласно предположению простой коммутант. Для некоторого точного неприводимого представления R алгебры Ли \mathfrak{g} тавтологическое представление $\mathfrak{g}: V$ совпадает с одним из представлений R и $R + R'$. Таким образом, мы можем говорить о неприводимой линейной алгебре Ли $R(\mathfrak{g})$, изоморфной алгебре Ли \mathfrak{g} как абстрактная алгебра, и о неприводимой простой линейной алгебре Ли $R([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$.

Если линейная алгебра Ли $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(V)$ приводима, то пространство $V_{\mathbb{R}}$ обладает $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ -инвариантной комплексной структурой, в результате чего естественным образом возникает комплексная линейная алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \oplus i\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{R}})$.

Говоря о неразложимых системах простых корней, мы будем использовать стандартную нумерацию простых корней (см., например, [5, табл. 1], [6, табл. 1]) и обозначать i -й базисный вес через φ_i .

В настоящей работе будут доказаны теоремы 1.1—1.3.

Теорема 1.1. *Допустим, что условие (1.1) не выполняется, а (простая) линейная алгебра Ли $R([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ не является ни присоединённой, ни классической.*

1. *Если линейная алгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(V)$ неприводима, то она совпадает с одной из следующих линейных алгебр:*

- 1) $\varphi_4(A_7), (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)(A_3)$;
- 2) $\varphi_r(B_r), (\varphi_1 + \varphi_r)(B_r), (\varphi_2 + \varphi_r)(B_r)$ ($r = 3, 4$);
- 3) $\varphi_3(B_4), (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)(B_3)$;
- 4) $\varphi_2(C_r)$ ($r > 2$);
- 5) $(\varphi_1 + \varphi_3)(C_3), (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)(C_3), \varphi_4(C_4), (\varphi_2 + \varphi_4)(C_4), \varphi_4(C_5)$;
- 6) $\varphi_8(D_8)$;
- 7) $(\varphi_1 + \varphi_r)(D_r)$ ($r = 4, 8$);
- 8) $\varphi_2(E_r)$ ($r = 7, 8$);
- 9) $(\varphi_1 + \varphi_{r-1})(E_r)$ ($r = 6, 8$);
- 10) $\varphi_7(E_8)$;
- 11) $\varphi_1(F_4), \varphi_2(F_4), \varphi_3(F_4), (\varphi_1 + \varphi_3)(F_4), (\varphi_1 + \varphi_4)(F_4), (\varphi_2 + \varphi_4)(F_4)$;
- 12) $\varphi_1(G_2)$.

2. *Если линейная алгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(V)$ приводима, то комплексная линейная алгебра Ли $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{R}})$ совпадает с одной из следующих линейных алгебр:*

- 1) $\varphi_2(A_r)$ ($r > 3$);
- 2) $(\varphi_1 + \varphi_{r-1})(A_r)$ ($r > 2$);
- 3) $\varphi_3(A_r)$ ($r = 5, 6, 7$);
- 4) $\varphi_r(B_r), (\varphi_1 + \varphi_r)(B_r), (\varphi_2 + \varphi_r)(B_r)$ ($r = 5, 6$);

- 5) $\varphi_3(C_3), (\varphi_2 + \varphi_3)(C_3), \varphi_3(C_4), (\varphi_1 + \varphi_4)(C_4);$
- 6) $\varphi_r(D_r), (\varphi_1 + \varphi_r)(D_r) \ (r = 5, 6, 7);$
- 7) $\varphi_1(E_6), \varphi_2(E_6), \varphi_1(E_7), \varphi_7(E_7), (\varphi_1 + \varphi_6)(E_7);$
- 8) $\varphi_2(A_{r-1}) \oplus \mathbb{C}E \ (r > 3);$
- 9) $\varphi_3(A_{r-1}) \oplus \mathbb{C}E \ (r = 6, 7);$
- 10) $\varphi_{r-1}(B_{r-1}) \oplus \mathbb{C}E \ (r = 4, 5, 6);$
- 11) $(\varphi_1 + \varphi_{r-1})(B_{r-1}) \oplus \mathbb{C}E \ (r = 3, \dots, 6);$
- 12) $\varphi_2(C_{r-1}) \oplus \mathbb{C}E \ (r > 3);$
- 13) $\varphi_3(C_{r-1}) \oplus \mathbb{C}E \ (r = 4, \dots, 7);$
- 14) $(\varphi_1 + \varphi_{r-1})(C_{r-1}) \oplus \mathbb{C}E \ (r = 3, 4);$
- 15) $\varphi_{r-1}(D_{r-1}) \oplus \mathbb{C}E \ (r = 6, 7, 8);$
- 16) $\varphi_1(E_{r-1}) \oplus \mathbb{C}E \ (r = 7, 8);$
- 17) $\varphi_1(F_4) \oplus \mathbb{C}E, \varphi_2(F_4) \oplus \mathbb{C}E, (\varphi_1 + \varphi_4)(F_4) \oplus \mathbb{C}E;$
- 18) $\varphi_1(G_2) \oplus \mathbb{C}E, (\varphi_1 + \varphi_2)(G_2) \oplus \mathbb{C}E.$

Замечание. Если (простая) линейная алгебра Ли $R([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ является присоединённой, то возможны следующие случаи:

- 1) линейная алгебра $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{sl}(V_{\mathbb{R}})$ является присоединённой простой компактной линейной алгеброй Ли;
- 2) линейная алгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(V)$ приводима, а комплексная линейная алгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{R}})$ совпадает с линейной алгеброй $\text{ad}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \oplus \mathbb{C}E \subset \mathfrak{gl}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$.

Теорема 1.2. Если линейная алгебра $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{sl}(V_{\mathbb{R}})$ является присоединённой простой компактной линейной алгеброй Ли, то условие (1.1) не выполняется. Если линейная алгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(V)$ приводима, а линейная алгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{R}})$ совпадает с линейной алгеброй $\text{ad}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \oplus \mathbb{C}E \subset \mathfrak{gl}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$, то условие (1.1) выполняется.

Теорема 1.3. Предположим, что (простая) линейная алгебра Ли $R([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ является классической. Условие (1.1) выполняется тогда и только тогда, когда линейная алгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(V)$ приводима, а комплексная линейная алгебра Ли $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{R}})$ совпадает с одной из линейных алгебр $\mathfrak{so}_{2r-1} \oplus \mathbb{C}E \ (r = 2, 3), \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{gl}_2$ и \mathfrak{sp}_4 .

В § 2 введён ряд используемых в работе обозначений, а также доказаны некоторые вспомогательные утверждения. В § 3 приведено доказательство теорем 1.1–1.3. Наконец, в § 4 размещены все необходимые таблицы.

Автор благодарит профессора Э. Б. Винберга за многолетнее научное руководство, постоянную поддержку и ценные советы.

§ 2. Обозначения и вспомогательные факты

В этом параграфе все пространства (в частности, алгебры Ли и их представления) рассматриваются, если не оговорено противное, над полем \mathbb{C} .

Если $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{sl}(V_i)$ ($i = 1, \dots, m$) — произвольные линейные алгебры Ли, то представление R алгебры Ли $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_m$ в пространстве $V := V_1 \otimes \dots \otimes V_m$, служащее тензорным произведением тавтологических представлений $\mathfrak{g}_i: V_i$ ($i = 1, \dots, m$), является точным, и мы будем называть линейную алгебру Ли $R(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{sl}(V)$, изоморфную алгебре Ли \mathfrak{g} как абстрактная алгебра, *тензорным произведением линейных алгебр Ли* $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{sl}(V_i)$, $i = 1, \dots, m$.

Хорошо известно, что любая неприводимая полупростая линейная алгебра Ли единственным образом представляется в виде тензорного произведения неприводимых простых линейных алгебр Ли, называемых её *простыми компонентами*.

Упорядоченную пару $(\Pi; \alpha)$, где Π — неразложимая система простых корней, а α — её корень с номером i , будем называть *системой с отмеченным корнем* и обозначать через $\Pi(\alpha)$ или через $\Pi(i)$. Назовём *изоморфизмом* двух систем с отмеченным корнем изоморфизм соответствующих неразложимых систем простых корней, переводящий отмеченные корни друг в друга. Будем говорить, что две системы с отмеченным корнем *изоморфны*, если между ними существует изоморфизм, и рассматривать все системы с отмеченным корнем с точностью до изоморфизма.

Обозначим через Ω множество следующих систем с отмеченным корнем:

- 1) $\Pi(1)$, $\Pi \neq E_8$;
- 2) $A_r(2)$, $r > 2$;
- 3) $A_5(3)$;
- 4) $B_r(r)$, $r = 3, 4$;
- 5) $C_r(2)$, $r > 2$;
- 6) $D_r(r)$, $r = 5, 6$.

Для неразложимой системы простых корней Π положим $\partial\Pi := \{\alpha \in \Pi: \Pi(\alpha) \in \Omega\} \subset \Pi$, а также $\overset{\circ}{\Pi} := \Pi \setminus (\partial\Pi) = \{\alpha \in \Pi: \Pi(\alpha) \notin \Omega\} \subset \Pi$. Все неразложимые системы простых корней Π , для которых $\partial\Pi \neq \Pi$ (или, что равносильно, $\overset{\circ}{\Pi} \neq \emptyset$), перечислены в таблице 1 с указанием подмножеств $\partial\Pi \subset \Pi$ и $\overset{\circ}{\Pi} \subset \Pi$.

Фундаментальные неприводимые представления произвольной простой алгебры Ли находятся в естественной биекции с корнями её (неразложимой) системы простых корней. Это позволяет установить биекцию между всеми (с точностью до изоморфизма) неприводимыми простыми линейными алгебрами Ли, тавтологическое представление которых является фундаментальным, и всеми системами с отмеченным корнем. В дальнейшем мы будем отождествлять каждую из указанных линейных алгебр Ли с соответствующей ей системой с отмеченным корнем. Таким образом, множество Ω можно понимать как определённый класс неприводимых простых линейных алгебр Ли. Обо-

значим через $\tilde{\Omega}$ класс всех простых линейных алгебр Ли множества Ω , имеющих ранг более 1.

Пусть $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ — неприводимая редуктивная линейная алгебра Ли. Тогда алгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ разлагается в прямую сумму своего центра и коммутанта, содержащихся в $\mathbb{C}E$ и $\mathfrak{sl}(V)$ соответственно. Обозначим через R тавтологическое представление $\mathfrak{g}: V$, а через \tilde{R} — представление алгебры \mathfrak{g} , равное R (соотв. $R + R'$), если представление R ортогонально (соотв. неортогонально).

Пусть $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{sl}(V_i)$ ($i = 1, \dots, m$) — простые компоненты неприводимой полупростой линейной алгебры Ли $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{sl}(V)$. Положим $r := \text{rk } \mathfrak{g}$ и $r_i := \text{rk } \mathfrak{g}_i$ ($i = 1, \dots, m$).

Лемма 2.1. *Допустим, что $m > 0$, $r_1 \geq r - 1$, а с.п.о.п. представления \tilde{R} алгебры \mathfrak{g} нетривиальна. Тогда либо $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ есть присоединённая простая линейная алгебра Ли, либо линейная алгебра Ли $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{sl}(V_1)$ относится к классу Ω .*

□ Рассмотрим произвольное число $i = 1, \dots, m$. Обозначим через R_i тавтологическое представление $\mathfrak{g}_i: V_i$. Положим $n_i := \dim V_i$. Далее, обозначим через l_i (соотв. L_i) индекс простой линейной алгебры Ли \mathfrak{g}_i (соотв. простой линейной алгебры Ли \mathfrak{g}_i как подалгебры линейной алгебры Ли $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{sl}(V)$). Всякий раз, говоря об индексе простой компоненты \mathfrak{g}_i неприводимой полупростой линейной алгебры Ли $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{sl}(V)$, мы будем подразумевать число L_i .

Очевидно, что для любого $i = 1, \dots, m$ число L_i равно произведению числа l_i и всех чисел n_j , $j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$.

Возможны следующие случаи.

Случай 1). Алгебра \mathfrak{g} проста — что равносильно, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$.

Случай 2). Центр алгебры \mathfrak{g} нетривиален, а линейная алгебра \mathfrak{g}_1 не является локально транзитивной.

Случай 3). Линейная алгебра \mathfrak{g}_1 локально транзитивна.

Случай 4). Линейная алгебра \mathfrak{g} является полупростой, но не является простой и обладает по крайней мере одной классической простой компонентой индекса менее 1.

Случай 5). Линейная алгебра \mathfrak{g} является полупростой, но не является простой, а все её классические простые компоненты имеют индекс не менее 1.

Предположим, что имеет место случай 2). Тогда $m = 1$, $r_1 = r - 1$, $\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $V_1 = V$ и $\mathfrak{g} = \mathbb{C}E \oplus \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{gl}(V)$. Значит, представление $\mathfrak{g}: V$ неортогонально. Поскольку линейная алгебра \mathfrak{g}_1 не является локально транзитивной, с.п.о.п. указанного представления содержится в подалгебре $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$; то же можно сказать и о с.п.о.п. представления \tilde{R} .

Таким образом, в каждом из случаев 1) и 2) представление $\tilde{R}|_{\mathfrak{g}_1}$ алгебры \mathfrak{g}_1 обладает нетривиальной с.п.о.п. и совпадает с представлением R_1 либо $R_1 + R'_1$, причём первый вариант возможен только в случае 1) при условии ортогональности представления $\mathfrak{g}: V$.

Все простые линейные алгебры Ли с нетривиальной с.п.о.п. суть в точности все присоединённые простые линейные алгебры Ли, а также все линейные алгебры Ли,

перечисленные в [6, табл. 1, 2] и [7, табл. 0]. Выбрав среди тавтологических представлений указанных линейных алгебр Ли ортогональные неприводимые представления и прямые суммы двух сопряжённых друг другу неприводимых представлений (учитывая при этом неприводимость присоединённого представления произвольной простой алгебры Ли), получаем требуемое утверждение в каждом из случаев 1) и 2).

Теперь разберём случай 3). Согласно результатам работы [8], любая локально транзитивная неприводимая простая линейная алгебра Ли может быть получена из линейной алгебры $A_r(1)$, $A_{2r}(2)$, $C_r(1)$ ($r \in \mathbb{N}$) либо $D_5(5)$ при помощи принципа двойственности (см. [8]). Применение последнего к неприводимой полупростой линейной алгебре Ли не влияет на её простые компоненты, отличные от линейных алгебр $A_r(1)$, и таким образом лемма в случае 3) доказана.

Далее будем предполагать, что имеет место один из случаев 4) и 5), а линейная алгебра \mathfrak{g}_1 не относится к классу Ω .

Справедливы следующие утверждения:

- 1) $m = 2$, $r_1 = r - 1$, $r_2 = 1$ и $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(V)$;
- 2) если линейная алгебра Ли \mathfrak{g}_1 является классической, то $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{so}_3$;
- 3) если $n_1 < 4$, то $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{so}_3$;
- 4) если линейная алгебра Ли \mathfrak{g}_2 является классической, то $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{sl}_2$ либо $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{so}_3$;
- 5) ни одна из простых компонент неприводимой полупростой линейной алгебры Ли \mathfrak{g} не относится к классу $\tilde{\Omega}$.

Если $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{so}_3$ для некоторого $i = 1, 2$, то $L_i \geq l_i = 1$, а если $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{sl}_2$, то $l_2 = \frac{1}{4}$ и $L_2 = \frac{n_1}{4}$. Значит, в случае 4) неприводимая полупростая линейная алгебра \mathfrak{g} имеет две простых компоненты $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{so}_3$ и $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{sl}_2$. Для такой линейной алгебры \mathfrak{g} представление R симплектично, его с.п.о.п. одномерна, представление R' точно, и, как следствие, с.п.о.п. представления $\tilde{R} = R + R'$ тривиальна, что приводит нас в случае 4) к противоречию.

Все неприводимые полупростые линейные алгебры Ли, не являющиеся простыми, не имеющие классических простых компонент индекса менее 1 и обладающие нетривиальной с.п.о.п., перечислены в [9, табл. 5, 6]. В этих таблицах каждая линейная алгебра Ли представлена в виде тензорного произведения неприводимых полупростых линейных алгебр Ли $\mathfrak{g}'_i \subset \mathfrak{sl}(V'_i)$, $i = 1, \dots, m'$ (в указанном порядке). Для всех линейных алгебр таблицы 6, а также для линейных алгебр №№ 4, 7, 8 таблицы 5 линейная алгебра \mathfrak{g}'_1 относится к классу $\tilde{\Omega}$. Кроме того, линейные алгебры №№ 2, 3, 6 таблицы 5 имеют по три простых компоненты. Значит, в случае 5) линейная алгебра \mathfrak{g} совпадает с одной из линейных алгебр №№ 1, 5 таблицы 5, т.е. $m' = 2$, $\mathfrak{g}'_1 = \mathfrak{so}_{n_1}$ и $n_1 = n_2 + 2$. При этом если $n_1 = 3$, то $n_2 = 1$, $\mathfrak{g}'_1 = \mathfrak{so}_3$, $\mathfrak{g}'_2 = 0$, $m = 1$; если $n_1 = 4$, то $n_2 = 2$, $\mathfrak{g}'_1 = \mathfrak{so}_4 \cong \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ и $\mathfrak{g}'_2 = \mathfrak{sl}_2$, откуда $m = 3$; если же $n_1 > 4$, то линейная алгебра $\mathfrak{g}'_1 = \mathfrak{so}_{n_1}$ относится к классу Ω . Тем самым мы и в случае 5) пришли к противоречию.

Теперь лемма полностью доказана. ■

Лемма 2.2. *Допустим, что $r = 1$, а с.п.о.п. представления \tilde{R} алгебры \mathfrak{g} нетривиальна. Тогда $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ есть присоединённая простая линейная алгебра Ли $\mathfrak{ad}(\mathfrak{sl}_2)$.*

□ Имеем $\mathrm{rk} \mathfrak{g} = r = 1 < \dim \mathfrak{g}$, поскольку с.п.о.п. точного представления \tilde{R} алгебры \mathfrak{g} нетривиальна. Значит, $m = 1$, $r_1 = 1 = r > r - 1$, $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}_2$, $V_1 = V$, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(V)$. Предположим, что линейная алгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(V)$ не является присоединённой. Согласно лемме 2.1, линейная алгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(V)$ относится к классу Ω и, ввиду равенства $r = 1$, совпадает с линейной алгеброй $A_1(1) = \mathfrak{sl}_2$. Тавтологическое представление R алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ симплектично, а с.п.о.п. её представления $\tilde{R} = R + R' = R + R$ тривиальна, что противоречит условию. ■

Утверждение 2.1. *Пусть Π и Π' — неразложимые системы простых корней, такие что $\Pi' \subset \Pi$ и $|\Pi'| = |\Pi| - 1$, а $\alpha \in \Pi' - \Pi$ — некоторый корень. Если $\Pi(\alpha) \in \Omega$, то $\Pi'(\alpha) \in \Omega$.*

□ Если $|\Pi'| = 1$, то $\Pi'(\alpha) = A_1(1) \in \Omega$. Далее будем считать, что $|\Pi| > 2$.

Согласно условию, $\Pi' = \Pi \setminus \{\beta\}$, где $\beta \in \Pi \setminus \{\alpha\}$ — корень неразложимой системы простых корней Π , соответствующий висячей вершине её (неразложимой) схемы Дынкина. Всевозможные системы с отмеченным корнем $\Pi'(\alpha)$, получаемые таким образом при $\Pi(\alpha) \in \Omega$ и $|\Pi| > 2$, перечислены в таблице 2 (где всюду предполагается, что $r > 2$). Осталось воспользоваться таблицей 1. ■

Следствие 2.1. *Пусть Π и Π' — неразложимые системы простых корней, такие что $\Pi' \subset \Pi$ и $|\Pi'| \geq |\Pi| - 1$. Если для корня $\alpha \in \Pi' - \Pi$ имеем $\Pi(\alpha) \in \Omega$, то $\Pi'(\alpha) \in \Omega$.*

Следующие два утверждения ввиду их известности приводятся без доказательства.

Утверждение 2.2. *Неприводимое представление произвольной комплексной редуктивной алгебры Ли \mathfrak{g} является точным тогда и только тогда, когда его веса относительно картановской подалгебры $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ линейно порождают пространство \mathfrak{t}^* .*

Утверждение 2.3. *Пусть \mathbb{E} — евклидово пространство, $\Pi \subset \mathbb{E}$ — неразложимая система простых корней, а $C \subset \mathbb{E}$ — её камера Вейля. Тогда для любого подмножества $\Pi' \subset \Pi$, отличного от Π , имеем $\langle \Pi' \rangle_{\mathbb{R}} \cap C = \{0\}$.*

§ 3. Доказательства результатов

Данный параграф посвящён доказательству теорем 1.1–1.3.

Вернёмся к обозначениям и предположениям из § 1.

Начнём с доказательства теоремы 1.1.

Фиксируем максимальную коммутативную подалгебру $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ и картановскую подалгебру $\mathfrak{t} := \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ алгебры \mathfrak{g} . В результате возникают система корней $\Delta \subset \mathfrak{t}^*$, группа Вейля $W \subset \mathbf{GL}(\mathfrak{t}^*)$, система положительных корней $\Delta^+ \subset \Delta$ и система простых корней $\Pi \subset \Delta^+ \subset \Delta$. Поскольку алгебра $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ проста, система простых корней $\Pi \subset \mathfrak{t}^*$

неразложима. Обозначим через \mathcal{P} семейство всех неразложимых систем простых корней $\Pi' \subset \Pi \subset \mathfrak{t}^*$ порядка $r-2$. В системе простых корней Π подмножество всех корней, не принадлежащих ни одному из подмножеств Π' ($\Pi' \in \mathcal{P}$), обозначим через $\partial_r \Pi$.

Пусть $\Lambda \subset \mathfrak{t}^*$ — система весов представления R , а $\lambda \in \Lambda$ — его старший вес относительно системы простых корней $\Pi \subset \Delta$. Положим $\Pi_\lambda := \{\alpha \in \Pi: \langle \lambda | \alpha \rangle \neq 0\} \subset \Pi$.

Имеем $\langle W\lambda \rangle = \langle \Lambda \rangle = \mathfrak{t}^*$, $\langle \{\lambda\} \cup \Pi \rangle = \mathfrak{t}^*$, $r = \dim \mathfrak{t}^* \in \{|\Pi|; |\Pi| + 1\}$, $|\Pi| \in \{r; r-1\}$. В частности, $r-2 < |\Pi|$.

Утверждение 3.1. *Предположим, что $r > 2$. Тогда система простых корней Π совпадает с объединением всех своих подмножеств $\Pi' \in \mathcal{P}$.*

□ Имеем $0 < r-2 < |\Pi|$. Значит, в (неразложимой) схеме Дынкина системы простых корней Π для любой вершины найдётся содержащая её неразложимая подсхема порядка $r-2$. ■

Пусть $\Pi' \in \mathcal{P}$ — некоторая система простых корней, удовлетворяющая условию

$$(r > 2) \Rightarrow (\Pi_\lambda \cap \Pi' \neq \emptyset), \quad (3.1)$$

а $W' \subset \mathbf{GL}(\mathfrak{t}^*)$ — её группа Вейля.

Имеем $|\Pi'| = r-2 < |\Pi|$. Согласно утверждению 2.3, система $(\{\lambda\} \cup \Pi') \subset \mathfrak{t}^*$ состоит из $r-1$ линейно независимых линейных функций, принимающих на вещественной форме $\mathbb{t}_{\mathbb{R}}$ пространства \mathfrak{t} чисто мнимые значения. Следовательно, пересечение ядер этих линейных функций имеет вид $\mathbb{C}\xi \subset \mathfrak{t}$, $\xi \in \mathbb{t}_{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$. В пространстве \mathfrak{t}^* подпространство всех линейных функций, обращающихся в нуль на векторе $\xi \in \mathbb{t}_{\mathbb{R}}$, можно отождествить с пространством \mathfrak{t}_0^* , где $\mathfrak{t}_0 := \mathfrak{t}/(\mathbb{C}\xi)$. Ясно, что $\dim \mathfrak{t}_0 = r-1$ и что $\mathfrak{t}_0^* = \langle \{\lambda\} \cup \Pi' \rangle \subset \mathfrak{t}^*$.

Докажем, что

$$\Pi' \subset \langle W'\lambda \rangle. \quad (3.2)$$

Для любого корня $\alpha \in \Pi_\lambda \cap \Pi'$ имеем $\alpha = \frac{1}{\langle \lambda | \alpha \rangle}(\lambda - r_\alpha \lambda) \in \langle W'\lambda \rangle$, $\alpha \in \langle W'\lambda \rangle \cap \langle \Pi' \rangle$. Если $r > 2$, то $\Pi_\lambda \cap \Pi' \neq \emptyset$, $\langle W'\lambda \rangle \cap \langle \Pi' \rangle \neq 0$, что влечёт (3.2), поскольку W' -подмодуль $\langle \Pi' \rangle \subset \mathfrak{t}^*$ прост. Если же $r = 2$, то $|\Pi'| = r-2 = 0$, $\Pi' = \emptyset \subset \langle W'\lambda \rangle$.

Согласно (3.2), $\mathfrak{t}_0^* = \langle \{\lambda\} \cup \Pi' \rangle = \langle W'\lambda \rangle \subset \mathfrak{t}^*$.

Обозначим через Δ_0 систему корней $(\Delta \cap \mathfrak{t}_0^*) \subset \mathfrak{t}_0^*$, а через Δ_0^+ — систему положительных корней $(\Delta^+ \cap \mathfrak{t}_0^*) \subset \Delta_0$. Последней соответствует система простых корней $\Pi_0 \subset \Delta_0$. Имеем $\Pi' \subset \Pi \subset \Delta^+$ и $\Pi' \subset \mathfrak{t}_0^*$, откуда $\Pi' \subset \Delta_0^+ \subset \Delta_0$. Кроме того, $\Pi \cap (\Delta^+ + \Delta^+) = \emptyset$, $\Pi' \cap (\Delta_0^+ + \Delta_0^+) = \emptyset$, и поэтому $\Pi' \subset \Pi_0$.

В алгебре \mathfrak{g} централизатор \mathfrak{g}' элемента $\xi \in \mathbb{t}_{\mathbb{R}}$ согласован с её компактной вещественной формой $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ и содержит картановскую подалгебру $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$. Значит, \mathfrak{g}' — комплексная редуктивная алгебра с компактной вещественной формой $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}} := \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, картановской подалгеброй $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ и системой корней $\Delta_0 \subset \mathfrak{t}^*$, а $\mathbb{C}\xi$ — центральный идеал алгебры \mathfrak{g}' , согласованный с её компактной вещественной формой $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}$. В свою очередь $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{g}'/(\mathbb{C}\xi)$ — комплексная редуктивная алгебра Ли с компактной вещественной формой $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}/(\mathbb{R}\xi)$, картановской подалгеброй \mathfrak{t}_0 и системой корней $\Delta_0 \subset \mathfrak{t}_0^*$, причём $\text{rk } \mathfrak{g}_0 = \dim \mathfrak{t}_0 = r-1$.

Пусть $V_0 \subset V$ — ядро оператора $\xi \in \mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(V)$. Ограничение тавтологического представления $\mathfrak{g}' : V$ на (очевидно, инвариантное) подпространство $V_0 \subset V$ естественным образом индуцирует представление $\mathfrak{g}_0 : V_0$, поскольку $(\mathbb{C}\xi)V_0 = 0$. При этом

$$\begin{aligned} V_0 &= (V_0 \cap V_{\mathbb{R}}) \oplus i(V_0 \cap V_{\mathbb{R}}) = (V_0 \cap V_{\mathbb{R}})(\mathbb{C}); \\ (\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}/(\mathbb{R}\xi))(V_0 \cap V_{\mathbb{R}}) &= \mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}(V_0 \cap V_{\mathbb{R}}) \subset (V_0 \cap V_{\mathbb{R}}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Алгебра \mathfrak{g}_0 обладает неприводимым представлением R_0 со старшим весом $\lambda \in \mathfrak{t}_0^*$ относительно системы положительных корней $\Delta_0^+ \subset \Delta_0$. Если $\pi : \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}_0$ — канонический эпиморфизм алгебр, то $R_0 \circ \pi$ — неприводимое представление алгебры \mathfrak{g}' со старшим весом $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ относительно системы положительных корней $\Delta_0^+ \subset \Delta_0$. Обозначим через \tilde{R}_0 представление алгебры \mathfrak{g}_0 , равное R_0 (соотв. $R_0 + R'_0$), если представление R_0 ортогонально (соотв. неортогонально).

Предложение 3.1. *Представление R_0 алгебры \mathfrak{g}_0 точно.*

□ Пусть $\Lambda_0 \subset \mathfrak{t}_0^*$ — система весов представления R_0 алгебры \mathfrak{g}_0 . Имеем $\Pi' \subset \Delta_0$, $W'\lambda \subset \Lambda_0$, $\mathfrak{t}_0^* = \langle W'\lambda \rangle \subset \langle \Lambda_0 \rangle \subset \mathfrak{t}_0^*$, $\langle \Lambda_0 \rangle = \mathfrak{t}_0^*$. Осталось применить утверждение 2.2. ■

Таким образом, мы можем отождествить алгебру \mathfrak{g}_0 с неприводимой редуктивной линейной алгеброй $R_0(\mathfrak{g}_0)$ и говорить о простых компонентах её коммутанта — простых линейных алгебрах Ли $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{sl}(V_i)$ ($i = 1, \dots, m$) — и о соответствующих им (в указанном порядке) неразложимых компонентах Π_1, \dots, Π_m системы простых корней $\Pi_0 \subset \Delta_0$.

Если \mathfrak{g}_0 есть присоединённая линейная алгебра, то $\lambda \in \mathfrak{t}_0^*$ — старший корень системы корней $\Delta_0 \subset \mathfrak{t}_0^*$, откуда $\lambda \in \Delta_0 \subset \Delta \subset \mathfrak{t}^*$.

Лемма 3.1. *Допустим, что $r = 2$, а с.п.о.п. представления \tilde{R}_0 алгебры \mathfrak{g}_0 нетривиальна. Тогда $\lambda \in \Delta$.*

□ Достаточно применить лемму 2.2 к линейной алгебре \mathfrak{g}_0 ранга $r - 1 = 1$. ■

Лемма 3.2. *Допустим, что $r > 2$, $\lambda \notin \Delta$, а с.п.о.п. представления \tilde{R}_0 алгебры \mathfrak{g}_0 нетривиальна. Тогда подмножество $(\Pi_\lambda \cap \Pi') \subset \Pi$ включает в себя единственный корень $\alpha \in \Pi$. При этом*

- 1) $\langle \lambda | \alpha \rangle = 1$ и $\Pi'(\alpha) \in \Omega$;
- 2) если система простых корней Π_0 неразложима, то $\Pi_0(\alpha) \in \Omega$, а также $\langle \lambda | \beta \rangle = 0$ для всякого $\beta \in \Pi_0 \setminus \{\alpha\}$.

□ Неразложимая система простых корней $\Pi' \subset \mathfrak{t}_0^*$ порядка $r - 2 > 0$ содержится в системе простых корней $\Pi_0 \subset \mathfrak{t}_0^*$, а значит, и в некоторой её неразложимой компоненте Π_i , $i = 1, \dots, m$ (в частности, $m > 0$). Не умаляя общности, будем считать, что $\Pi' \subset \Pi_1$. Имеем

$$|\Pi_1| \leq |\Pi_0| \leq \dim \mathfrak{t}_0^* = r - 1 = |\Pi'| + 1; \quad (3.4)$$

$$\text{rk } \mathfrak{g}_1 = |\Pi_1| \geq |\Pi'| = r - 2 = \text{rk } \mathfrak{g}_0 - 1. \quad (3.5)$$

Поскольку $r > 2$, подмножество $(\Pi_\lambda \cap \Pi') \subset \Pi$ не является пустым и включает в себя некоторый корень $\alpha \in \Pi$. Применяя лемму 2.1 к линейной алгебре \mathfrak{g}_0 и учитывая (3.5), получаем, что линейная алгебра $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{sl}(V_1)$ относится к классу Ω . Это означает, что

- 1) $\langle \lambda | \alpha \rangle = 1$;
- 2) $\langle \lambda | \beta \rangle = 0$ для всякого $\beta \in \Pi_1 \setminus \{\alpha\}$ (в частности, $\langle \lambda | \beta \rangle = 0$ для всякого $\beta \in \Pi' \setminus \{\alpha\}$);
- 3) $\Pi_1(\alpha) \in \Omega$ (и, согласно соотношению (3.4) и следствию 2.1, $\Pi'(\alpha) \in \Omega$). ■

Лемма 3.3. *Предположим, что с.п.о.п. представления \tilde{R}_0 алгебры \mathfrak{g}_0 тривиальна. Тогда найдётся вектор $v \in V_{\mathbb{R}}$, такой что $\xi \in (\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})_v$ и $\text{rk}((\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})_v) = 1$.*

□ Напомним, что $\lambda \in \mathfrak{t}_0^* \subset \mathfrak{t}^*$ — старший вес представления R алгебры \mathfrak{g} относительно системы простых корней $\Pi \subset \Delta$. В силу (3.3), представление \tilde{R}_0 алгебры \mathfrak{g}_0 вкладывается в представление $\mathfrak{g}_0: V_0$. Значит, с.п.о.п. последнего тривиальна. Вновь пользуясь соотношениями (3.3), получаем, что с.п.о.п. представления $(\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}/(\mathbb{R}\xi)): (V_0 \cap V_{\mathbb{R}})$ тривиальна. Следовательно, существует вектор $v \in V_0 \cap V_{\mathbb{R}}$, для которого $\mathfrak{g}_v \cap \mathfrak{g}'_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\xi$. Итак, $((\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})_v) \cap \mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_v \cap \mathfrak{g}'_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\xi$, т.е. подалгебра $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})_v \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ содержит $\mathbb{R}\xi$ в качестве максимальной коммутативной подалгебры и потому имеет ранг 1. ■

Замечание. Схема доказательства леммы 3.3 унаследована из [10], где используется аналогичный метод нахождения точек, имеющих замкнутую орбиту и стабилизатор ранга 1, для комплексных редуктивных линейных групп Ли.

Из лемм 3.1–3.3 вытекает следующая лемма.

Лемма 3.4. *Допустим, что $\lambda \notin \Delta$, а в пространстве $V_{\mathbb{R}}$ не существует вектора v , такого что $\xi \in (\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})_v$ и $\text{rk}((\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})_v) = 1$. Тогда $r > 2$ и $\Pi_\lambda \cap \Pi' = \{\alpha\} \subset \Pi$ ($\alpha \in \Pi$). При этом*

- 1) $\langle \lambda | \alpha \rangle = 1$ и $\alpha \in \partial\Pi'$;
- 2) если система простых корней Π_0 неразложима, то $\alpha \in \partial\Pi_0$, а также $\langle \lambda | \beta \rangle = 0$ для всякого $\beta \in \Pi_0 \setminus \{\alpha\}$.

До сих пор предполагалось, что фиксирована система простых корней $\Pi' \in \mathcal{P}$, удовлетворяющая (3.1). В дальнейшем же мы будем всякий раз выбирать её в зависимости от конкретной ситуации. В таком случае из леммы 3.4 вытекает следующая лемма.

Лемма 3.5. *Предположим, что $\lambda \notin \Delta$, а условие (1.1) не выполняется. Пусть $\Pi' \in \mathcal{P}$ — система простых корней, удовлетворяющая (3.1). В пространстве \mathfrak{t}^* обозначим через Π_0 систему простых корней, соответствующую системе положительных корней $\Delta^+ \cap \langle \{\lambda\} \cup \Pi' \rangle$. Тогда $r > 2$ и $\Pi_\lambda \cap \Pi' = \{\alpha\} \subset \Pi$ ($\alpha \in \Pi$). При этом*

- 1) $\langle \lambda | \alpha \rangle = 1$ и $\alpha \in \partial\Pi'$;
- 2) если система простых корней Π_0 неразложима, то $\alpha \in \partial\Pi_0$, а также $\langle \lambda | \beta \rangle = 0$ для всякого $\beta \in \Pi_0 \setminus \{\alpha\}$.

Лемма 3.6. *Допустим, что $\lambda \notin \Delta$, а условие (1.1) не выполняется. Тогда $r > 2$, а для любой системы простых корней $\Pi' \in \mathcal{P}$ имеем*

$$\begin{aligned} |\Pi_\lambda \cap \Pi'| &\leq 1; & \Pi_\lambda \cap \overset{\circ}{\Pi}' &= \emptyset; \\ \forall \alpha \in \Pi_\lambda \cap \Pi' & & \langle \lambda | \alpha \rangle &= 1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

□ Предположим, что $r = 2$. Тогда система простых корней $\Pi' := \emptyset \subset \Pi$ принадлежит семейству \mathcal{P} и удовлетворяет (3.1). Применяя к ней лемму 3.5, получаем, что $r > 2$, и тем самым приходим к противоречию.

Следовательно, $r > 2$. Пусть $\Pi' \in \mathcal{P}$ — произвольная система простых корней. Если она удовлетворяет (3.1), то соотношения (3.6) имеют место в силу леммы 3.5. Если же условие (3.1) не выполнено, то $\Pi_\lambda \cap \Pi' = \emptyset$, что немедленно влечёт (3.6). ■

Лемма 3.7. *Допустим, что $\lambda \notin \Delta$, а условие (1.1) не выполняется. Тогда $r > 2$, $\Pi_\lambda \subset \partial_r \Pi$,*

$$\forall \Pi' \in \mathcal{P} \quad |\Pi_\lambda \cap \Pi'| \leq 1; \quad (3.7)$$

$$\forall \alpha \in \Pi_\lambda \quad \langle \lambda | \alpha \rangle = 1. \quad (3.8)$$

□ Из леммы 3.6 следует, что $r > 2$ и $\Pi_\lambda \subset \partial_r \Pi$, а также справедливо соотношение (3.7). Теперь, применяя утверждение 3.1 и (повторно) лемму 3.6, получаем (3.8). ■

Приведём более удобную и фундаментальную трактовку леммы 3.7.

Теорема 3.1. *Предположим, что $\lambda \notin \Delta$, а условие (1.1) не выполняется. Тогда*

- 1) $r > 2$;
- 2) $\langle \lambda | \alpha \rangle = 0$ для всякого $\alpha \in \Pi \setminus (\partial_r \Pi)$;
- 3) $\langle \lambda | \alpha \rangle \in \{0; 1\}$ для всякого $\alpha \in \partial_r \Pi$;
- 4) на схеме Дынкина системы простых корней Π любым различным корням $\alpha, \beta \in \Pi$, таким что $\langle \lambda | \alpha \rangle = \langle \lambda | \beta \rangle = 1$, соответствуют вершины, путь между которыми содержит не менее $r - 2$ рёбер.

На основе таблицы 1 все случаи, когда $r > 2$, Π — неразложимая система простых корней порядка r (соотв. $r - 1$), $\Pi' \in \mathcal{P}$ и $\overset{\circ}{\Pi}' \neq \emptyset$, описаны с указанием подмножества $\overset{\circ}{\Pi}' \subset \Pi$ и помещены в таблицу 3 (соотв. в таблицу 5). Далее, все случаи, когда $r > 2$, Π — неразложимая система простых корней порядка r (соотв. $r - 1$) и $\partial_r \Pi \neq \Pi$, приведены с указанием подмножества $\partial_r \Pi \subset \Pi$ в таблице 4 (соотв. в таблице 6), составленной на основе таблицы 3 (соотв. таблицы 5).

Предложение 3.2. *Допустим, что $\lambda \in \Delta$. Тогда $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, а (простая) линейная алгебра $R(\mathfrak{g})$ является присоединённой либо совпадает с одной из простых линейных алгебр $\varphi_1(B_r)$, $\varphi_2(C_r)$, $\varphi_1(F_4)$ и $\varphi_1(G_2)$.*

□ Имеем $\lambda \in \Delta \subset \langle \Pi \rangle \subset \mathfrak{t}^*$, $\langle \Pi \rangle = \langle \{\lambda\} \cup \Pi \rangle = \mathfrak{t}^*$, $|\Pi| = \dim \mathfrak{t}^* = r$, $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Кроме того, в системе корней Δ с системой простых корней Π корень λ является доминантным,

а значит, совпадает со старшим корнем либо (в случае наличия корней двух различных длин) с наибольшим коротким корнем. ■

Предложение 3.3. *Допустим, что $\Pi = B_r$, $\lambda \notin \Delta$, $\langle \lambda | \alpha_r \rangle = 0$, а условие (1.1) не выполняется. Тогда $\langle \lambda | \alpha_1 \rangle = \dots = \langle \lambda | \alpha_{r-2} \rangle = 0$.*

□ Предположим, что $\langle \lambda | \alpha_i \rangle \neq 0$ для некоторого $i \in \{1, \dots, r-2\}$.

Система простых корней $\Pi' := \{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-2}\} \subset \Pi$ принадлежит семейству \mathcal{P} и удовлетворяет (3.1). Легко видеть, что $\langle \{\lambda\} \cup \Pi' \rangle = \langle \alpha_r \rangle^\perp$. В пространстве \mathfrak{t}^* обозначим через Π_0 систему простых корней, соответствующую системе положительных корней $\Delta^+ \cap \langle \{\lambda\} \cup \Pi' \rangle$. Имеем $\alpha := \alpha_{r-1} + \alpha_r \in \Delta^+$, $h_\alpha = 2h_{\alpha_{r-1}} + h_{\alpha_r}$, $\langle \lambda | \alpha \rangle = 2\langle \lambda | \alpha_{r-1} \rangle + \langle \lambda | \alpha_r \rangle$, а Π_0 есть неразложимая система простых корней типа B_{r-1} , включающая в себя простые корни $\alpha_1, \dots, \alpha_{r-2}, \alpha$ в стандартном порядке, откуда $\partial \Pi_0 \subset \{\alpha_1, \alpha\}$. В силу леммы 3.5, $i = 1$, $\langle \lambda | \alpha_1 \rangle = 1$, $0 = \langle \lambda | \alpha_2 \rangle = \dots = \langle \lambda | \alpha_{r-2} \rangle = \langle \lambda | \alpha \rangle = 2\langle \lambda | \alpha_{r-1} \rangle + \langle \lambda | \alpha_r \rangle$, и, как следствие, $\langle \lambda | \alpha_1 \rangle = 1$, $0 = \langle \lambda | \alpha_2 \rangle = \dots = \langle \lambda | \alpha_{r-2} \rangle = \langle \lambda | \alpha_{r-1} \rangle = \langle \lambda | \alpha_r \rangle$, $\lambda = \varphi_1 \in \Delta$. Получили противоречие. ■

Предложение 3.4. *Допустим, что $\Pi = C_r$, $\lambda \notin \Delta$, $\langle \lambda | \alpha_r \rangle = 0$, а условие (1.1) не выполняется. Тогда $\lambda = \varphi_1$ либо $\langle \lambda | \alpha_1 \rangle = \dots = \langle \lambda | \alpha_{r-2} \rangle = 0$.*

□ Предположим, что $\langle \lambda | \alpha_i \rangle \neq 0$ для некоторого $i \in \{1, \dots, r-2\}$.

Система простых корней $\Pi' := \{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-2}\} \subset \Pi$ принадлежит семейству \mathcal{P} и удовлетворяет (3.1). Легко видеть, что $\langle \{\lambda\} \cup \Pi' \rangle = \langle \alpha_r \rangle^\perp$. В пространстве \mathfrak{t}^* обозначим через Π_0 систему простых корней, соответствующую системе положительных корней $\Delta^+ \cap \langle \{\lambda\} \cup \Pi' \rangle$. Имеем $\alpha := 2\alpha_{r-1} + \alpha_r \in \Delta^+$, $h_\alpha = h_{\alpha_{r-1}} + h_{\alpha_r}$, $\langle \lambda | \alpha \rangle = \langle \lambda | \alpha_{r-1} \rangle + \langle \lambda | \alpha_r \rangle$, а Π_0 есть неразложимая система простых корней типа C_{r-1} , включающая в себя простые корни $\alpha_1, \dots, \alpha_{r-2}, \alpha$ в стандартном порядке, откуда $\partial \Pi_0 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$. В силу леммы 3.5, $i \in \{1, 2\}$, $\langle \lambda | \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$ для всякого $j = 1, \dots, r-2$, а также $\langle \lambda | \alpha \rangle = 0$. Значит, $\langle \lambda | \alpha_{r-1} \rangle + \langle \lambda | \alpha_r \rangle = \langle \lambda | \alpha \rangle = 0$, $\langle \lambda | \alpha_{r-1} \rangle = \langle \lambda | \alpha_r \rangle = 0$, что влечёт равенство $\langle \lambda | \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$ для любого $j = 1, \dots, r$. Тем самым мы получили, что $\lambda = \varphi_i \in \{\varphi_1, \varphi_2\}$ и, поскольку $\varphi_2 \in \Delta$, $\lambda = \varphi_1$. ■

Предложение 3.5. *Допустим, что $r > 3$, $\Pi = D_r$, $\lambda \notin \Delta \cup \{\varphi_1\}$, $\langle \lambda | \alpha_{r-1} \rangle = \langle \lambda | \alpha_r \rangle$, а условие (1.1) не выполняется. Тогда $\langle \lambda | \alpha_1 \rangle = \dots = \langle \lambda | \alpha_{r-2} \rangle = 0$.*

□ Предположим, что $\langle \lambda | \alpha_i \rangle \neq 0$ для некоторого $i \in \{1, \dots, r-2\}$.

Система простых корней $\Pi' := \{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-2}\} \subset \Pi$ принадлежит семейству \mathcal{P} и удовлетворяет (3.1), причём $\langle \{\lambda\} \cup \Pi' \rangle = \langle \alpha_{r-1} - \alpha_r \rangle^\perp$. Далее, в пространстве \mathfrak{t}^* обозначим через Π_0 систему простых корней, соответствующую системе положительных корней $\Delta^+ \cap \langle \{\lambda\} \cup \Pi' \rangle$. Для корня $\alpha := \alpha_{r-2} + \alpha_{r-1} + \alpha_r \in \Delta^+$ имеем $h_\alpha = h_{\alpha_{r-2}} + h_{\alpha_{r-1}} + h_{\alpha_r}$, $\langle \lambda | \alpha \rangle = \langle \lambda | \alpha_{r-2} \rangle + \langle \lambda | \alpha_{r-1} \rangle + \langle \lambda | \alpha_r \rangle$, а Π_0 есть неразложимая система простых корней типа D_{r-1} , включающая в себя простые корни $\alpha_1, \dots, \alpha_{r-2}, \alpha$ в стандартном порядке, откуда $\partial \Pi_0 \subset \{\alpha_1, \alpha_{r-2}, \alpha\}$. Согласно лемме 3.5, $i \in \{1, r-2\}$, $\langle \lambda | \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$ для всякого $j = 1, \dots, r-2$, а также $\langle \lambda | \alpha \rangle = 0$. Поэтому $\langle \lambda | \alpha_{r-2} \rangle + \langle \lambda | \alpha_{r-1} \rangle + \langle \lambda | \alpha_r \rangle = \langle \lambda | \alpha \rangle = 0$, и,

как следствие, $\langle \lambda | \alpha_{r-2} \rangle = \langle \lambda | \alpha_{r-1} \rangle = \langle \lambda | \alpha_r \rangle = 0$, $i \neq r-2$, $i = 1$, что влечёт равенство $\langle \lambda | \alpha_j \rangle = \delta_{1j}$ для любого $j = 1, \dots, r$. Значит, $\lambda = \varphi_1$. Получили противоречие. ■

Следствие 3.1. *Допустим, что $\lambda \notin \Delta$, а условие (1.1) не выполняется. Тогда*

- 1) $r > 2$;
- 2) если $\Pi = B_r$, то $\lambda \in \{\varphi_{r-1}, \varphi_r, \varphi_1 + \varphi_r, \varphi_2 + \varphi_r, \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_r\}$;
- 3) если $r > 3$ и $\Pi = B_r$, то $\lambda \in \{\varphi_{r-1}, \varphi_r, \varphi_1 + \varphi_r, \varphi_2 + \varphi_r\}$;
- 4) если $\Pi = C_r$, то $\lambda \in \{\varphi_1, \varphi_{r-1}, \varphi_r, \varphi_1 + \varphi_r, \varphi_2 + \varphi_r, \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_r\}$;
- 5) если $r > 3$ и $\Pi = C_r$, то $\lambda \in \{\varphi_1, \varphi_{r-1}, \varphi_r, \varphi_1 + \varphi_r, \varphi_2 + \varphi_r\}$;
- 6) если $r > 3$ и $\Pi = D_r$, то $\lambda \in \{\varphi_1, \varphi_{r-1}, \varphi_r, \varphi_1 + \varphi_{r-1}, \varphi_1 + \varphi_r, \varphi_{r-1} + \varphi_r\}$;
- 7) если $r > 4$ и $\Pi = D_r$, то $\lambda \in \{\varphi_1, \varphi_{r-1}, \varphi_r, \varphi_1 + \varphi_{r-1}, \varphi_1 + \varphi_r\}$.

□ Вытекает из теоремы 3.1 и предложений 3.3–3.5. ■

Теперь, проводя подробный анализ на основе теоремы 3.1, предложения 3.2, следствия 3.1, а также таблиц 4 и 6, получаем утверждение теоремы 1.1.

Перейдём к доказательству теорем 1.2 и 1.3.

Предположим, что (простая) линейная алгебра $\text{Ли } R([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ является присоединённой либо классической.

Пусть $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ — с.п.о.п. линейной алгебры $\text{Ли } \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{sl}(V_{\mathbb{R}})$, а $\mathfrak{t}_{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]} \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ — картановская подалгебра алгебры $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Следующее утверждение является очевидным.

Утверждение 3.2. *Если $\text{rk } \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = 1$, то условие (1.1) выполняется, а если $\text{rk } \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} > 1$, то условие (1.1) не выполняется.*

Возможны следующие случаи.

Случай 1). Линейная алгебра $\text{Ли } R([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ является присоединённой простой линейной алгеброй Ли , алгебра \mathfrak{g} имеет одномерный центр, а тавтологическое представление $\mathfrak{g}: V$ совпадает с $R + R'$. Линейная алгебра $\text{Ли } R([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ не является локально транзитивной, вследствие чего $\mathfrak{t}_{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]} \subset \mathfrak{g}$ есть с.п.о.п. представления R алгебры \mathfrak{g} . Имеем $\dim \mathfrak{t}_{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]} = \text{rk } [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = r - 1 \geq 1$. Значит, система корней простой алгебры $\text{Ли } [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ относительно её картановской подалгебры $\mathfrak{t}_{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}$ содержит некоторое подмножество, линейно порождающее гиперплоскость в $\mathfrak{t}_{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}^*$. Поэтому представление $R'|_{\mathfrak{t}_{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}}$ алгебры $\mathfrak{t}_{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}$ обладает вектором с одномерной стационарной подалгеброй; то же можно сказать и о тавтологическом представлении $\mathfrak{g}: V$. Таким образом, условие (1.1) выполняется.

Случай 2). Линейная алгебра $\text{Ли } R([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ совпадает с линейной алгеброй $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$, где $n \in \{2r - 2, 2r - 1\}$ и $n > 4$, алгебра \mathfrak{g} имеет одномерный центр, а тавтологическое представление $\mathfrak{g}: V$ совпадает с $R + R'$. Далее, линейная алгебра $\text{Ли } R([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ не является локально транзитивной. Поэтому с.п.о.п. тавтологического представления $\mathfrak{g}: V$ есть не что иное как с.п.о.п. представления $(R + R')|_{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}$ алгебры $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, которая, в свою очередь, изоморфна алгебре $\text{Ли } \mathfrak{so}_{n-2}(\mathbb{C})$ ранга $r - 2$. Итак, $\text{rk } \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = r - 2$. Значит, $\text{rk } \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = 1$ при $n = 5$ и $\text{rk } \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} > 1$ иначе.

Случай 3). Тавтологическое представление $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}: V_{\mathbb{R}}$ получается из представления $\text{Mat}_{(r-1) \times (r-1)}(\mathbb{H}) \oplus \text{Mat}_{1 \times 1}(\mathbb{H}): \text{Mat}_{(r-1) \times 1}(\mathbb{H}), (A+B): X \rightarrow AX - XB$ ($r > 2$) ограничением на подалгебру $(\mathfrak{u}_{r-1}(\mathbb{H}) \oplus \mathfrak{i}\mathbb{R}E) \subset (\text{Mat}_{(r-1) \times (r-1)}(\mathbb{H}) \oplus \text{Mat}_{1 \times 1}(\mathbb{H}))$ — прямую сумму подалгебр $\mathfrak{u}_{r-1}(\mathbb{H}) \subset \text{Mat}_{(r-1) \times (r-1)}(\mathbb{H})$ и $\mathfrak{i}\mathbb{R}E \subset \text{Mat}_{1 \times 1}(\mathbb{H})$. Легко видеть, что $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \cong \mathfrak{u}_{r-2}(\mathbb{H}) \oplus \mathbb{R}$. Отсюда $\text{rk } \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = r - 1 > 1$.

Случай 4). Линейная алгебра $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{sl}(V_{\mathbb{R}})$ является присоединённой простой компактной линейной алгеброй Ли. Подалгебра $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ является максимальной коммутативной подалгеброй алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, откуда $\text{rk } \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \text{rk } \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = r > 1$.

Случай 5). Линейная алгебра $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{sl}(V_{\mathbb{R}})$ совпадает с одной из линейных алгебр $\mathfrak{so}_{2r}(\mathbb{R})$ ($r > 2$), $\mathfrak{so}_{2r+1}(\mathbb{R})$, $\mathfrak{su}_{r+1}(\mathbb{C})$, $\mathfrak{u}_r(\mathbb{C})$, $\mathfrak{u}_r(\mathbb{H})$. Подалгебра $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{so}_{2r-1}(\mathbb{R})$, $\mathfrak{so}_{2r}(\mathbb{R})$, $\mathfrak{su}_r(\mathbb{C})$, $\mathfrak{u}_{r-1}(\mathbb{C})$, $\mathfrak{u}_{r-1}(\mathbb{H})$ соответственно и имеет ранг, равный r при $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{so}_{2r+1}(\mathbb{R})$ и $r - 1$ иначе. Отсюда $\text{rk } \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = 1$ при $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{su}_3(\mathbb{C})$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{u}_2(\mathbb{C})$ либо $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{u}_2(\mathbb{H})$ и $\text{rk } \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} > 1$ в противном случае.

Теперь для доказательства теорем 1.2 и 1.3 достаточно воспользоваться утверждением 3.2.

§ 4. Справочный раздел

Таблица 1.

№	Π	$\partial\Pi$	$\overset{\circ}{\Pi}$
1)	$A_r, \quad r \geq 6$	$1, 2, r-1, r$	$3, \dots, r-2$
2)	$B_r, \quad r = 3, 4$	$1, r$	$2, \dots, r-1$
3)	$B_r, \quad r \geq 5$	1	$2, \dots, r$
4)	$C_r, \quad r \geq 3$	$1, 2$	$3, \dots, r$
5)	$D_r, \quad r = 4, 5, 6$	$1, r-1, r$	$2, \dots, r-2$
6)	$D_r, \quad r \geq 7$	1	$2, \dots, r$
7)	E_6	$1, 5$	$2, 3, 4, 6$
8)	E_7	1	$2, \dots, 7$
9)	E_8	\emptyset	$1, \dots, 8$
10)	F_4	1	$2, 3, 4$
11)	G_2	1	2

Таблица 2.

№	$\Pi(\alpha)$	i	$(\Pi \setminus \{\alpha_i\})(\alpha)$
1)	$A_r(1)$	r	$A_{r-1}(1)$
2)	$A_r(2)$	r	$A_{r-1}(2)$
3)	$A_r(2)$	1	$A_{r-1}(1)$
4)	$A_5(3)$	1	$A_4(2)$
5)	$B_r(1)$	r	$A_{r-1}(1)$
6)	$B_r(r), \quad r = 3, 4$	1	$B_{r-1}(r-1)$
7)	$C_r(1)$	r	$A_{r-1}(1)$
8)	$C_r(2)$	r	$A_{r-1}(2)$
9)	$C_r(2)$	1	$C_{r-1}(1)$
10)	$D_r(1)$	r	$A_{r-1}(1)$
11)	$D_r(r), \quad r = 5, 6$	$r-1$	$A_{r-1}(r-1)$
12)	$D_r(r), \quad r = 5, 6$	1	$D_{r-1}(r-1)$
13)	$E_r(1), \quad r = 6, 7$	r	$A_{r-1}(1)$
14)	$E_r(1), \quad r = 6, 7$	$r-1$	$D_{r-1}(1)$
15)	$F_4(1)$	4	$C_3(1)$

Таблица 3.

№	Π	Π'		$\overset{\circ}{\Pi}'$
1)	$A_r, \quad r \geq 8$	$3, \dots, r$	A_{r-2}	$5, \dots, r-2$
2)	$A_r, \quad r \geq 8$	$2, \dots, r-1$	A_{r-2}	$4, \dots, r-3$
3)	$A_r, \quad r \geq 8$	$1, \dots, r-2$	A_{r-2}	$3, \dots, r-4$
4)	$B_r, \quad r = 5, 6$	$3, \dots, r$	B_{r-2}	$4, \dots, r-1$
5)	$B_r, \quad r \geq 7$	$3, \dots, r$	B_{r-2}	$4, \dots, r$
6)	$B_r, \quad r \geq 8$	$2, \dots, r-1$	A_{r-2}	$4, \dots, r-3$
7)	$B_r, \quad r \geq 8$	$1, \dots, r-2$	A_{r-2}	$3, \dots, r-4$
8)	$C_r, \quad r \geq 5$	$3, \dots, r$	C_{r-2}	$5, \dots, r$
9)	$C_r, \quad r \geq 8$	$2, \dots, r-1$	A_{r-2}	$4, \dots, r-3$
10)	$C_r, \quad r \geq 8$	$1, \dots, r-2$	A_{r-2}	$3, \dots, r-4$
11)	$D_r, \quad r = 6, 7, 8$	$3, \dots, r$	D_{r-2}	$4, \dots, r-2$
12)	$D_r, \quad r \geq 9$	$3, \dots, r$	D_{r-2}	$4, \dots, r$
13)	$D_r, \quad r \geq 8$	$2, \dots, r-1$	A_{r-2}	$4, \dots, r-3$
14)	$D_r, \quad r \geq 8$	$2, \dots, r-2, r$	A_{r-2}	$4, \dots, r-3$
15)	$D_r, \quad r \geq 8$	$1, \dots, r-2$	A_{r-2}	$3, \dots, r-4$
16)	E_6	$2, 3, 4, 6$	D_4	3
17)	E_7	$3, \dots, 7$	D_5	$4, 5$
18)	E_7	$2, \dots, 5, 7$	D_5	$3, 4$
19)	E_8	$3, \dots, 8$	E_6	$4, 5, 6, 8$
20)	E_8	$2, \dots, 6, 8$	D_6	$3, 4, 5$
21)	E_8	$1, \dots, 5, 8$	A_6	$3, 4$
22)	E_8	$2, \dots, 7$	A_6	$4, 5$
23)	E_8	$1, \dots, 6$	A_6	$3, 4$

Таблица 4.

№	Π	$\partial_r \Pi$
1)	$A_r, \quad r \geq 8$	$1, 2, r-1, r$
2)	$B_r, \quad r = 5, 6$	$1, 2, 3, r$
3)	B_7	$1, 2, 3$
4)	$B_r, \quad r \geq 8$	$1, 2$
5)	$C_r, \quad r = 5, 6, 7$	$1, 2, 3, 4$
6)	$C_r, \quad r \geq 8$	$1, 2$

Продолж. на сл. стр.

Продолжение табл. 4.

№	Π	$\partial_r \Pi$
7)	$D_r, \quad r = 6, 7$	$1, 2, 3, r - 1, r$
8)	D_8	$1, 2, 7, 8$
9)	$D_r, \quad r \geq 9$	$1, 2$
10)	E_6	$1, 2, 4, 5, 6$
11)	E_7	$1, 2, 6, 7$
12)	E_8	$1, 2, 7$

Таблица 5.

№	Π	Π'		$\overset{\circ}{\Pi}'$
1)	$A_{r-1}, \quad r \geq 8$	$2, \dots, r - 1$	A_{r-2}	$4, \dots, r - 3$
2)	$A_{r-1}, \quad r \geq 8$	$1, \dots, r - 2$	A_{r-2}	$3, \dots, r - 4$
3)	$B_{r-1}, \quad r = 5, 6$	$2, \dots, r - 1$	B_{r-2}	$3, \dots, r - 2$
4)	$B_{r-1}, \quad r \geq 7$	$2, \dots, r - 1$	B_{r-2}	$3, \dots, r - 1$
5)	$B_{r-1}, \quad r \geq 8$	$1, \dots, r - 2$	A_{r-2}	$3, \dots, r - 4$
6)	$C_{r-1}, \quad r \geq 5$	$2, \dots, r - 1$	C_{r-2}	$4, \dots, r - 1$
7)	$C_{r-1}, \quad r \geq 8$	$1, \dots, r - 2$	A_{r-2}	$3, \dots, r - 4$
8)	$D_{r-1}, \quad r = 6, 7, 8$	$2, \dots, r - 1$	D_{r-2}	$3, \dots, r - 3$
9)	$D_{r-1}, \quad r \geq 9$	$2, \dots, r - 1$	D_{r-2}	$3, \dots, r - 1$
10)	$D_{r-1}, \quad r \geq 8$	$1, \dots, r - 2$	A_{r-2}	$3, \dots, r - 4$
11)	$D_{r-1}, \quad r \geq 8$	$1, \dots, r - 3, r - 1$	A_{r-2}	$3, \dots, r - 4$
12)	E_6	$2, \dots, 6$	D_5	$3, 4$
13)	E_6	$1, 2, 3, 4, 6$	D_5	$2, 3$
14)	E_7	$2, \dots, 7$	E_6	$3, 4, 5, 7$
15)	E_7	$1, \dots, 5, 7$	D_6	$2, 3, 4$
16)	E_7	$1, \dots, 6$	A_6	$3, 4$
17)	E_8	$2, \dots, 8$	E_7	$3, \dots, 8$
18)	E_8	$1, \dots, 6, 8$	D_7	$2, \dots, 6, 8$
19)	E_8	$1, \dots, 7$	A_7	$3, 4, 5$
20)	F_4	$2, 3, 4$	B_3	3
21)	F_4	$1, 2, 3$	C_3	3

Таблица 6.

№	Π	$\partial_r \Pi$
1)	$A_{r-1}, \quad r \geq 8$	$1, 2, r-2, r-1$
2)	$B_{r-1}, \quad r = 5, 6$	$1, 2, r-1$
3)	$B_{r-1}, \quad r \geq 7$	$1, 2$
4)	$C_{r-1}, \quad r = 5, 6, 7$	$1, 2, 3$
5)	$C_{r-1}, \quad r \geq 8$	$1, 2$
6)	$D_{r-1}, \quad r = 6, 7, 8$	$1, 2, r-2, r-1$
7)	$D_{r-1}, \quad r \geq 9$	$1, 2$
8)	E_6	$1, 5, 6$
9)	E_7	$1, 6$
10)	E_8	1
11)	F_4	$1, 2, 4$

Литература

- [1] О. Г. Стырт, *О пространстве орбит компактной линейной группы Ли с коммутативной связной компонентой*, Труды ММО, 2009, т. 70, 235—287.
- [2] О. Г. Стырт, *О пространстве орбит трёхмерной компактной линейной группы Ли*, Изв. РАН, Сер. мат., 2011, т. 75, №4, 165—188.
- [3] О. Г. Стырт, *О пространстве орбит трёхмерной простой компактной линейной группы Ли*, Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1, Математика. Механика, 2010, вып. 6, 55—56.
- [4] Г. Бредон, *Введение в теорию компактных групп преобразований*, М.: Наука, 1980.
- [5] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, М.: УРСС, 1995.
- [6] А. Г. Элашвили, *Канонический вид и стационарные подалгебры точек общего положения для простых линейных групп Ли*, Функц. ан. и его прил., 1972, т. 6, №1, 51—62.
- [7] А. М. Попов, *Конечные стационарные подгруппы общего положения простых линейных групп Ли*, Тр. ММО, 1985, т. 48, 7—59.
- [8] Г. Б. Шпиз, *Классификация неприводимых локально транзитивных линейных групп Ли*, Геом. методы в задачах алгебры и анализа, Ярославль, 1978, 152—160.
- [9] А. Г. Элашвили, *Стационарные подалгебры точек общего положения для неприводимых линейных групп Ли*, Функц. ан. и его прил., 1972, т. 6, №2, 65—78.
- [10] V. G. Kac, V. L. Popov, E. B. Vinberg, *Sur les groupes line'aires alge'briques dont l'alge'bre des invariants est libre*, C.R.Acad.Sci., Paris, 1976, 283, 875—878.